FAMILLE ADMISE ASSOCIÉE À UNE VALUATION DE K(X)

par

Michel Vaquié

Résumé. — Soit K un corps muni d'une valuation ν, et soit $L = K(x)$ une extension monogène transcendante de K, alors toute valuation μ de L qui prolonge ν est déterminée par sa restriction à l'anneau des polynômes $K[x]$. Nous savons associer à cette valuation μ une famille de valuations $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in}$ de $K[x]$, appelée famille admise associée, qui converge en un certain sens vers la valuation μ. Bien que la définition de cette famille, ainsi que la notion de convergence, fassent intervenir de manière esentielle la structure de l'anneau de polynômes, en particulier le degré des polynômes, nous montrons dans cette note que la famille $\mathcal{A}$ de valuations de L ne dépend pas du générateur x choisi.

Abstract. — Let K be a field with a valuation ν and let $L = K(x)$ be a transcendantal extension of K, then any valuation μ of L which extends ν is determined by its restriction to the polynomial ring $K[x]$. We know how to associate to this valuation μ a family of valuations $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in}$ of $K[x]$, called the associated admise family, which converges in a certain sense towards the valuation μ. Although the definition of this family, as well as the notion of convergence, essentially imply the structure of the polynomial ring, in particular the degree of polynomials, we show in this note that the family $\mathcal{A}$ of valuations of L do not depend on the chosen generator x.

Table des matières

Introduction 2
1. Famille admise associée à une valuation de $K[x]$ 3
2. Indépendance du générateur 7
Références 19

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 13A18 (12J10 14E15).
Mots clefs. — valuation, extension, famille admise.

Introduction

Soit K un corps muni d'une valuation ν, à valeurs dans un groupe ordonné Γ_ν, une *famille admise* de valuations $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in I}$ est une famille de valuations ou de pseudo-valuations distinctes de l'anneau des polynômes $K[x]$ prolongeant la valuation ν, à valeurs dans un groupe totalement ordonné Γ, indexée par un ensemble totalement ordonné I possédant un plus petit élément ι, vérifiant les propriétés suivantes :

1. pour tout polynôme f dans $K[x]$ la famille $(\mu_i(f))_{i\in I}$ est croissante dans le groupe Γ, c'est-à-dire $\mu_i(f) \leq \mu_j(f)$ pour $i < j$ dans I, de plus s'il existe $i < j$ avec $\mu_i(f) = \mu_j(f)$ alors pour tout $i' \geq i$ nous avons $\mu_i(f) = \mu_{i'}(f)$;
2. pour tout polynôme f dans $K[x]$ la famille $(\mu_i(f))_{i\in I}$ admet un plus grand élément dans le groupe Γ, c'est-à-dire si l'ensemble I n'a pas de plus grand élément pour tout polynôme f il existe $i \in I$ tel que $\mu_i(f) = \mu_j(f)$ pour tout $j \geq i$.

Comme l'anneau $K[x]$ est de dimension un, si μ_1 est une pseudo-valuation de $K[x]$ dont le *socle* $\mathfrak{p} = \{x \in K[x] \mid \mu_1(x) = +\infty\}$ est non réduit à (0), il n'existe pas de pseudo-valuation μ_2 de $K[x]$ distincte de μ_1 telle que $\mu_1 \leq \mu_2$. Par conséquent toutes les pseudo-valuations d'une famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in I}$ sont en fait des valuations, à l'exception de la *dernière*, c'est-à-dire de $\mu_{\bar{\imath}}$ dans le cas où l'ensemble I admet un plus grand élément $\bar{\imath}$, qui peut être une valuation ou une pseudo-valuation.

Nous appelons *limite* de la famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in I}$ la valuation ou pseudo-valuation μ de $K[x]$ définie pour tout polynôme f par

$$\mu(f) \;=\; Sup\big(\mu_i(f)\;;\; i \in I\big)\;.$$

Si l'ensemble I admet un plus grand élément $\bar{\imath}$, la limite de la famille est la valuation ou pseudo-valuation $\mu_{\bar{\imath}}$, sinon la limie est une valuation définie par $\mu(f) = \mu_i(f)$ pour i assez grand dans I. Nous disons aussi que la famille $\mathcal{A}$ *converge* vers la valuation μ.

De plus chaque valuation μ_i de la famille est définie de manière explicite à partir des valuations μ_j pour $j < i$ et d'un polynôme unitaire irréductible ϕ_i de $K[x]$ appelé suivant les cas *polynôme-clé* ou *polynôme-clé limite*. Nous associons ainsi à la famille admise $\mathcal{A}$ une famille de polynômes unitaires $(\phi_i)_{i\in I}$, et cette famille vérifie les deux propriétés suivantes :

1. pour $i < j$ dans I nous avons deg $\phi_i \leq$ deg ϕ_j et deg$\phi_\iota = 1$ où ι est le plus petit élément de l'ensemble I ;
2. pour tout polynôme f de $K[x]$, si deg $f <$ deg ϕ_i alors $\mu_i(f) = \mu(f)$.

Soit L une extension monogène de K, alors toute valuation $\tilde{\mu}$ de L qui prolonge ν est déterminée par une valuation ou une pseudo-valuation μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ qui prolonge ν. Plus précisément μ est une valuation de $K[x]$, restriction de la valuation $\tilde{\mu}$ si $L = K(x)$ est une extension transcendante pure de K et μ est une pseudo-valuation de socle $\mathfrak{p}$ si L est une extension algébrique de K définie par un polynôme ϕ, $L = K[x]/(\phi)$, et l'idéal $\mathfrak{p}$ est l'idéal de $K[x]$ engendré par ϕ.

Nous savons que nous pouvons obtenir toute valuation ou pseudo-valuation μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ qui prolonge ν grâce à une famille admise de valuations $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i\in I}$ qui converge vers μ, et cette famille est essentiellement unique (cf.

théorèmes 2.4 et 2.5 de [**Va1**] et proposition 2.9. de [**Va2**]), et nous disons que $\mathcal{A}$ est une *famille admise associée* à la valuation ou la pseudo-valuation μ (cf. [**Va2**]).

La définition de la famille admise $\mathcal{A} = (\mu_I)_{i\in I}$ et sa construction explicite à partir de la famille de polynômes $(\phi_i)_{i\in I}$ utilisent de manière essentielle les propriétés de l'anneau $K[x]$, en particulier la notion de degré et l'existence de la division euclidienne. De même la propriété de croissance des valeurs $\mu_i(f)$ pour f dans l'anneau $K[x]$ est essentielle à la définition de la famille admise, alors que si μ_1 et μ_2 sont deux valuations distinctes sur un corps L, il ne peut exister de relation de comparaison de la forme $\mu_1(u) \leq \mu_2(u)$ valable pour tout u dans L.

Pourtant dans le cas où l'extension L est l'extension transcendante pure $K(x)$, si μ est une valuation de L qui prolonge la valuation ν, la famille $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in I}$, considérée comme famille de valuations de L, est indépendante du générateur x choisi. Plus précisément nous allons montrer que si x et y sont deux générateurs de L sur K, les familles admises de valuations de L associées aux restrictions de μ aux anneaux des polynôme $K[x]$ et $K[y]$ sont équivalentes.

1. Famille admise associée à une valuation de $K[x]$

Dans ce qui suit nous nous donnons une valuation ν sur un corps K et toutes les valuations ou pseudo-valuations μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ que nous considérons sont des prolongements de ν. Nous nous donnons aussi un groupe totalement ordonné $\tilde{\Gamma}$, contenant le groupe des ordres Γ_ν de la valuation ν, et toutes les valuations ou pseudo-valuations μ de $K[x]$ ont leur groupe des ordres Γ_μ qui est un sous-groupe ordonné de $\tilde{\Gamma}$.

Pour toute valuation μ de $K[x]$ nous pouvons définir la notion de *polynôme-clé* ϕ, et si ϕ est un polynôme-clé pour μ et si γ est un élément de $\tilde{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu(\phi)$, nous pouvons définir une nouvelle valuation μ' de $K[x]$, appelée *valuation augmentée* associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ que nous notons $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$, de la manière suivante :

pour tout polynôme f de $K[x]$, nous écrivons le développement de f selon les puissances de ϕ, $f = g_m\phi^m + \ldots + g_1\phi + g_0$, où les polynômes g_j, $0 \leq j \leq m$ sont de degré strictement inférieur au degré du polynôme-clé ϕ, et nous avons :

$$\mu'(f) \ = \ Inf\,(\mu(g_j) + j\gamma\ ;\ 0 \leq j \leq m)\ .$$

Nous pouvons définir aussi pour tout polynôme unitaire ϕ de degré un, $\phi = x + b$, et pour toute valeur γ de $\tilde{\Gamma}$ une valuation μ de $K[x]$, que nous appelons encore *valuation augmentée* associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ que nous notons $\mu = [\nu\ ;\ \mu(\phi) = \gamma]$, de la manière suivante :

tout polynôme f de $K[x]$ s'écrit de manière unique sous la forme $f = a_d\phi^d + \ldots + a_1\phi + a_0$, avec $a_j \in K$, et nous posons

$$\mu(f) \ = \ Inf\,(\nu(a_j) + j\gamma\ ;\ 0 \leq j \leq d)\ .$$

De plus nous pouvons aussi définir la notion de *famille de valuations augmentées itérées* comme une famille dénombrable $\big(\mu_i\big)_{i\in I}$ de valuations de $K[x]$, $I = \{1, \ldots, n\}$

ou $I = \mathbb{N}^*$, associée à une famille de polynômes $\big(\phi_i\big)_{i\in I}$ et à une famille $\big(\gamma_i\big)_{i\in I}$ d'éléments de $\tilde{\Gamma}$, telle que chaque valuation μ_i, $i > 1$, est une valuation augmentée de la forme $\mu_i = [\mu_{i-1}\ ;\ \mu_i(\phi_i) = \gamma_i]$ et où la famille des polynômes-clés $\big(\phi_i\big)$ vérifie les deux propriétés suivantes : pour tout $i > 2$ nous avons deg$\phi_i \geq$ degϕ_{i-1} et les polynômes ϕ_i et ϕ_{i-1} ne sont pas μ_{i-1}-équivalents. Nous renvoyons aux articles [**McL 1**], [**McL 2**], et [**Va1**], pour les définitions et les propriétés des polynômes-clés, des valuations augmentées et des familles de valuations augmentées itérées.

De manière analogue pour toute famille admissible continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ (voir la définition précise plus bas) nous pouvons définir la notion de *polynôme-clé limite* et de *valuation augmentée limite*. Plus précisément soit $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ une famille admissible continue de valuations de $K[x]$, indexée par un ensemble totalement ordonné A sans plus grand élément, associée à la famille de polynômes-clés $\big(\phi_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ et à la famille de valeurs $\big(\gamma_\alpha\big)_{\alpha\in A}$. Par définition chaque valuation μ_α est une valuation augmentée de la forme $\mu_\alpha = [\mu\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, où μ est une valuation de $K[x]$ donnée, les polynômes-clés ϕ_α sont tous de même degré d et les valeurs γ_α forment une famille croissante sans plus grand élément dans $\tilde{\Gamma}$.

Nous définissons alors l'ensemble

$$\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big) = \tilde{\Phi}\left(\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\right) \;=\; \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f), \forall \alpha < \beta \in A\}\ ,$$

Si cet ensemble est non vide, nous appelons $d_{\mathcal{C}}$ le degré minimal des polynômes appartenant à $\tilde{\Phi}_\mu\big(\mathcal{C}\big)$ et nous définissons l'ensemble

$$\Phi\big(\mathcal{C}\big) = \Phi\left(\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\right) \;=\; \{\phi \in \tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big),\ \text{deg}\phi = d_{\mathcal{C}} \text{ et } \phi \text{ unitaire }\}\ .$$

Un polynôme ϕ appartenant à $\Phi\big(\mathcal{C}\big)$ est un polynôme-clé-limite pour la famille $\mathcal{C}$, mais nous pouvons donner une autre définition de polynôme-clé limite de la manière suivante.

Nous disons qu'un polynôme f *A-divise* un polynôme g s'il existe $\alpha \in A$ tel que pour tout $\beta \geq \alpha$ dans A , f μ_β-divise g. Nous pouvons alors définir les notions de *A-minimalité* et *A-irréductibilité* et un polynôme-clé-limite pour la famille $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ est un polynôme unitaire ϕ qui est A-minimal et A-irréductible.

Soit ϕ un polynôme-clé limite ϕ pour la famille $\mathcal{C}$, alors un polynôme f appartient à $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$ si et seulement si il est A-divisible par ϕ, et pour tout polynôme f n'appartenant pas à $\tilde{\Phi}\big(\mathcal{C}\big)$, en particulier pour tout polynôme f de degré deg$f <$ degϕ, nous pouvons définir $\mu_A(f)$ par $\mu_A(f) = Sup\,(\mu_\alpha(f)\ ;\ \alpha \in A) = \mu_\alpha(f)$ pour α suffisamment grand.

Soient ϕ un polynôme-clé limite et γ un élément de $\tilde{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A, nous pouvons définir une nouvelle valuation μ' de $K[x]$, appelée *valuation augmentée limite* pour $\mathcal{C}$ associée au polynôme-clé limite ϕ et à la valeur γ que nous notons $\mu' = \big[(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma\big]$, de la manière suivante :

pour tout polynôme f de $K[x]$, nous écrivons le développement de f selon les puissances de ϕ, $f = g_m\phi^m + \ldots + g_1\phi + g_0$, où les polynômes g_j, $0 \leq j \leq m$, sont de degré strictement inférieur au degré de ϕ, et nous posons :

$$\mu'(f) \;=\; Inf\,(\mu_A(g_j) + j\gamma\ ;\ 0 \leq j \leq m)\ .$$

Nous allons finir cette partie par un résultat qui est l'analogue pour les valuations augmentées limites du théorème 5.2. de [**McL 1**]. Pour cela nous devons rappeler quelques propriétés des polynômes-clés limites et des valuations augmentées limites.

Lemme 1.1. — *Soit $f = q\phi + r$ la division euclidienne de f par le polynôme-clé limite ϕ, alors si f n'est pas A-divisible par ϕ nous avons $\mu_A(r) = \mu_A(f) < \mu_\alpha(q\phi)$ pour tout α suffisamment grand dans A.*

Preuve du lemme. — Comme les polynômes r et f n'appartiennent pas à l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ il existe α dans A tel que pour tout $\beta > \alpha$ nous ayons $\mu_\beta(r) = \mu_\alpha(r) = \mu_A(r)$ et $\mu_\beta(f) = \mu_\alpha(f) = \mu_A(f)$. Nous déduisons le résultat des inégalités strictes $\mu_\alpha(q\phi) < \mu_\beta(q\phi)$ pour tout $\alpha < \beta$ dans A.

□

Proposition 1.2. — *Soit ϕ un polynôme-clé limite pour la famille continue $\mathcal{C}$ et soit μ' la valuation augmentée limite associée à ϕ et à une valeur γ, $\mu' = \left[(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma\right]$. Pour tout polynôme f de $K[x]$, si nous avons une relation $f = f_m\phi^m + \ldots + f_1\phi + f_0$ avec des polynômes f_j, $0 \le j \le m$, non A-divisibles par ϕ nous avons l'égalité*

$$\mu'(f) \ = \ Inf\,(\mu_A(f_j) + j\gamma\ ;\ 0 \le j \le m)\ .$$

Preuve. — Pour tout j soit $f_j = q_j\phi + r_j$ la division euclidienne de f_j par ϕ, et nous posons $f = q\phi + r$ avec $r = r_m\phi^m + \ldots + r_1\phi + r_0$ et $q = q_m\phi^m + \ldots + q_1\phi + q_0$. Nous déduisons du lemme précédent

$$\begin{array}{rcl} \mu'(f) & \ge & Inf\,(\mu_A(f_j) + j\gamma\ ;\ 0 \le j \le m) \\ & = & Inf\,(\mu_A(r_j) + j\gamma\ ;\ 0 \le j \le m) \ = \ \mu'(r)\ , \end{array}$$

et pour α suffisamment

$$\begin{array}{rcl} \mu'(q\phi) & \ge & Inf\,(\mu'(q_j\phi) + j\gamma\ ;\ 0 \le j \le m) \\ & > & Inf\,(\mu_\alpha(q_j\phi) + j\gamma\ ;\ 0 \le j \le m) \\ & > & Inf\,(\mu_A(r_j) + j\gamma\ ;\ 0 \le j \le m) \ = \ \mu'(r)\ , \end{array}$$

d'où l'égalité cherchée.

□

Nous renvoyons à [**Va1**] pour les définitions précises et les propriétés des polynômes-clés limites et des valuations augmentées limites.

Nous pouvons maintenant définir une famille admissible, et aussi fixer les notations que nous utiliserons dans la suite.

Définition. — Une *famille admissible $\mathcal{A}$ pour la valuation ν de K* est une famille de valuations $\left(\mu_i\right)_{i\in I}$ de $K[x]$, obtenue comme réunion de familles admissibles simples

$$\mathcal{A} \ = \ \bigcup_{j\in J} \mathcal{S}^{(j)}\ ,$$

où J est un ensemble dénombrable, $J = \{1, \ldots, N\}$ ou $J = \mathbb{N}^*$, et nous définissons J^* par $J^* = \{1, \ldots, N-1\}$ si J est fini et par $J^* = J = \mathbb{N}^*$ sinon. Pour tout j dans

J la famille admissible simple $\mathcal{S}^{(j)}$ est constituée d'une *partie discrète* $\mathcal{D}^{(j)}$ et d'une *partie continue* $\mathcal{C}^{(j)}$,

$$\mathcal{S}^{(j)} \ = \ \big(\mathcal{D}^{(j)}; \mathcal{C}^{(j)}\big) \ = \ \big((\mu_l^{(j)})_{l \in L^{(j)}}; (\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha \in A^{(j)}}\big) \ ,$$

avec $L^{(j)} \ = \ \{1, \ldots, n_j\}$ ou $L^{(j)} \ = \ \mathbb{N}^*$ et $A^{(j)}$ ensemble totalement ordonné sans élément maximal, vérifiant :

- pour j appartenant à J^*, la partie discrète $\mathcal{D}^{(j)} = \big(\mu_l^{(j)}\big)_{l \in L^{(j)}}$ est finie et la partie continue $\mathcal{C}^{(j)} = \big(\mu_\alpha^{(j)}\big)_{\alpha \in A^{(j)}}$ est non vide, et la première valuation $\mu_1^{(j+1)}$ de la famille simple $\mathcal{S}^{(j+1)}$ est une valuation augmentée limite pour la famille admissible continue $\mathcal{C}^{(j)}$;

- la première valuation $\mu_1^{(1)}$ de la famille est la valuation associée à un polynôme unitaire $\phi_1^{(1)}$ de degré un et à une valeur $\gamma_1^{(1)}$, $\mu_1^{(1)} = [\nu \ ; \ \mu_1^{(1)}(\phi_1^{(1)}) = \gamma_1^{(1)}]$.

Dans la suite, comme la valuation ν de K est fixée nous dirons simplement que $\mathcal{A}$ est une famille admissible de valuations de $K[x]$.

La partie discrète $\mathcal{D} = \big(\mu_i\big)_{i \in I}$ d'une famille admissible simple $\mathcal{S}$ est une famille non vide de valuations augmentées itérées de $K[x]$ telle que la famille de polynômes-clés $\big(\phi_i\big)_{i \in I}$ vérifie l'inégalité stricte $\deg\phi_i > \deg\phi_{i-1}$.

La partie continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ de la famille admissible simple $\mathcal{S}$ est une famille de valuations de $K[x]$, où l'ensemble A est un ensemble totalement ordonné, sans élément maximal, associée à une famille de polynômes $\big(\phi_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ de même degré d, et à une famille $\big(\gamma_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ d'éléments de $\tilde{\Gamma}$, pour tout $\alpha < \beta$ dans A, ϕ_β est un polynôme-clé pour la valuation μ_α et la valuation μ_β est la valuation augmentée $\mu_\beta = [\mu_\alpha \ ; \ \mu_\beta(\phi_\beta) = \gamma_\beta]$, avec $\gamma_\beta > \mu_\alpha(\phi_\beta) = \gamma_\alpha$. La famille $\mathcal{C}$ est vide si la famille $\mathcal{D}$ est infinie, sinon le degré d des polynômes-clé ϕ_α est égal au degré du dernier polynôme-clé ϕ_n de la famille $\big(\phi_i\big)_{i \in I}$ associée à $\mathcal{D}$, et pour tout α dans A, la valuation μ_α est la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu_n \ ; \ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$.

Nous pouvons aussi écrire la famille admissible $\mathcal{A}$ comme une famille indexée par un ensemble totalement ordonné I,

$$\mathcal{A} \ = \ (\mu_i)_{i \in I} \ ,$$

et l'ensemble I peut être décrit de la manière suivante : pour tout j dans J, nous munissons l'ensemble $B^{(j)} = L^{(j)} \sqcup A^{(j)}$ de l'ordre total induit par les ordres sur $L^{(j)}$ et sur $A^{(j)}$ et défini par $l < \alpha$ pour tout $l \in L^{(j)}$ et tout $\alpha \in A^{(j)}$; et nous posons

$$I \ = \ \big\{(j, b) \mid j \in J \text{ et } b \in B^{(j)}\big\} \ ,$$

muni de l'ordre lexicographique, c'est-à-dire $(j, b) < (j', b')$ si $j < j'$ dans J et $(j, b) \leq (j, b')$ si et seulement si $b \leq b'$ dans $B^{(j)}$. L'ordre sur l'ensemble I peut être caractérisé par la relation suivante : $i < k$ dans I si et seulement si pour tout polynôme f de $K[x]$ nous avons $\mu_i(f) \leq \mu_k(f)$ et il existe au moins un polynôme g avec $\mu_i(g) < \mu_k(g)$.

A toute famille admissible $\mathcal{A}$ nous associons la famille des polynômes-clés ou polynômes-clés limites $\big(\phi_i\big)_{i \in I}$, que nous appelons pour simplifier la famille des polynômes-clés, et la famille des valeurs $\big(\gamma_i\big)_{i \in I}$.

Définition. — Une famille admissible $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in I}$ est une famille *admise* si pour tout polynôme f dans $K[x]$ la famille $(\mu_i(f))_{i\in I}$ admet un plus grand élément dans le groupe Γ.

Si l'ensemble I possède un plus grand élément $\bar{\imath}$, c'est le cas quand la famille admissible $\mathcal{A}$ est réunion d'un nombre fini de familles simples et quand la dernière famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est discrète finie, $\mathcal{S}^{(N)} = \big(\mu_1^{(N)}, \ldots, \mu_{n_N}^{(N)}\big)$, alors la famille $\mathcal{A}$ est admise et est dite *complète*. Dans ce cas la dernière valuation $\mu_{\bar{\imath}} = \mu_{n_N}^{(N)}$ peut être une pseudo-valuation de $K[x]$.

Si l'ensemble I n'a pas de plus grand élément, une famille $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in I}$ est admise si pour tout polynôme f il existe $i \in I$ tel que $\mu_i(f) = \mu_j(f)$ pour tout $j \geq i$. C'est le cas si la famille $\mathcal{A}$ est réunion infinie de familles admissibles simples, ou si la famille $\mathcal{A}$ est réunion de t familles admissibles simples $\mathcal{A} = \mathcal{S}^{(1)} \cup \ldots \cup \mathcal{S}^{(N)}$, telle que la dernière famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est une famille discrète infinie, c'est-à-dire $\mathcal{S}^{(N)} = \big(\mu_l^{(N)}\big)_{l\in L^{(N)}}$ avec $L^{(N)}$ infini, ou enfin si la famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est une famille infinie, $\mathcal{S}^{(N)} = \big((\mu_l^{(N)})_{l\in L^{(N)}}; (\mu_\alpha^{(N)})_{\alpha\in A^{(N)}}\big)$, telle que pour tout f dans $K[x]$ il existe $\alpha < \beta$ dans $A^{(N)}$ avec $\mu_\alpha^{(N)}(f) = \mu_\beta^{(N)}(f)$.

La famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in I}$ converge vers la valuation ou pseudo-valuation μ de $K[x]$ définie pour tout polynôme f par

$$\mu(f) \ = \ Sup\big(\mu_i(f) \ ; \ i \in I\big) \ .$$

Si l'ensemble I admet un plus grand élément $\bar{\imath}$, la limite de la famille est la valuation ou pseudo-valuation $\mu_{\bar{\imath}}$, sinon la limie est une valuation définie par $\mu(f) = \mu_i(f)$ pour i assez grand dans I.

Nous avons une réciproque au résultat précédent.

Théorème 1.3. — *(Théorèmes 2.4. et 2.5. de* [**Va1**]*) Soit μ une valuation ou pseudo-valuation de $K[x]$ prolongeant une valuation ν de K, alors il existe une famille admise de valuations de $K[x]$, notée $\mathcal{A}(\mu)$ et appelée* famille admise associée à la valuation μ *qui converge vers μ.*

Remarque 1.4. — *La famille admise associée à une valuation μ n'est pas unique, mais est déterminée à équivalence près, où deux familles admissibles $\mathcal{A} = \bigcup_{j\in J} \mathcal{S}^{(j)}$ et $\mathcal{A}' = \bigcup_{j\in J'} \mathcal{S}'^{(j)}$ sont dites équivalentes si $J = J'$, si les familles discrètes $\mathcal{D}^{(j)} = \big(\mu_i^{(j)}\big)_{1\leq i\leq n}$ et $\mathcal{D}'^{(j)} = \big(\mu'^{(j)}_i\big)_{1\leq i\leq n'}$ coïncident jusqu'à l'avant-dernière valuation, c'est-à-dire quand $n = n'$ et $\mu_i^{(j)} = \mu_i'^{(j)}$ pour tout i, $1 \leq i \leq n-1$, et si les sous-familles continues $\mathcal{C}^{(j)}$ et $\mathcal{C}'^{(j)}$ coïncident asymptotiquement. (cf. Proposition 2.9. de* [**Va2**]*)*

2. Indépendance du générateur

Soient L une extension monogène de K et $\tilde{\mu}$ une valuation de L qui prolonge ν. Si nous choisissons un générateur de l'extension L, nous pouvons écrire le corps L soit comme le corps des fractions de l'anneau des polynômes $K[x]$, soit comme le corps quotient de l'anneau des polynômes $K[x]$ par un idéal premier $\mathfrak{p}$. Dans le premier cas, L est une extension transcendante pure, $L = K(x)$, et la valuation $\tilde{\mu}$ de L induit par restriction une valuation μ de $K[x]$, dans le deuxième cas L est une extension finie, $L = K(\theta)$, et la valuation $\tilde{\mu}$ de L induit une pseudo-valuation μ de $K[x]$ dont le socle est l'idéal premier $\mathfrak{p}$ engendré par le polynôme minimal de θ sur K.

La construction de la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ associée par le théorème 1.3 à la valuation ou pseudo-valuation μ de l'anneau $K[x]$ se fait par approximations successives. Nous supposons que nous avons construit une famille admissible $\mathcal{A}' = \big(\mu_i\big)_{i \in I'}$ convergeant vers une valuation μ' telle que pour tout polynôme f de $K[x]$ et tout $i \in I'$ nous ayons l'inégalité $\mu'(f) \leq \mu(f)$. Si la valuation μ' est différente de la valuation μ nous considérons alors l'ensemble suivant

$$\Phi_\mu(\mu') \ = \ \{\phi \in K[x] \mid \mu'(\phi) < \mu(\phi) \ , \ \deg\phi = d \text{ et } \phi \text{ unitaire}\} \ ,$$

où d est le degré minimal des polynômes vérifiant l'inégalité stricte $\mu'(f) < \mu(f)$.

Nous choisissons un un polynôme ϕ_j de cet ensemble, nous vérifions que c'est un polynôme-clé ou un polynôme-clé limite qui permet de construire une valuation augmentée ou une valuation augmentée limite μ_j. Nous obtenons ainsi une nouvelle famille admissible $\mathcal{A}'' = \big(\mu_i\big)_{i \in I''}$, où l'ensemble ordonné I'' est égal à $I' \cup \{j\}$ avec $j > i$ pour tout $i \in I'$.

La nouvelle famille obtenue converge par construction vers la valuation μ_j, qui est une *meilleure approximation* de la vauation μ que la valuation μ' dans la mesure où l'ensemble $\tilde{\Phi}_\mu(\mu_j)$ des polynômes f de $K[x]$ qui vérifient l'inégalité stricte $\mu_j(f) < \mu(f)$ est strictement inclus dans l'ensemble $\tilde{\Phi}_\mu(\mu')$ des polynômes f qui vérifient $\mu'(f) < \mu(f)$. Nous renvoyons aux articles de l'auteur [**Va1**] et [**Va2**] pour la construction précise de la famille admise associée.

Cette construction n'a de sens que sur l'anneau des polynômes, en particulier elle fait intervenir la notion de degré, la division euclidienne et une relation de comparaison de la forme $\mu_i(f) \leq \mu_j(f)$ pour tout f dans $K[x]$, alors qu'il est impossible d'avoir une relation de comparaison de la forme $\mu_i(u) \leq \mu_j(u)$ pour tout élément u d'un corps avec deux valuations distinctes. Il semble donc que la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ dépende de manière essentielle du choix du générateur, et dans le début du paragraphe 2 de [**Va2**] l'auteur fait la remarque suivante *"... la famille admissible de valuations que nous allons définir à partir de la valuation μ de L dépend du générateur x ou θ de L sur K."*

En fait nous allons montrer que dans le cas où L est une extension transcendante pure de K, c'est-à-dire dans le cas où L est le corps des fractions de l'anneau des polynômes $K[x]$, la famille de valuations $\mathcal{A}(\mu) = \big(\mu_i\big)_{i \in I}$, considérées comme des valuations du corps L, est indépendante du générateur x choisi.

Plus précisément nous allons comparer les familles admises de valuations de L, $\mathcal{A}_{[x]} = \big(\mu_{[x],i}\big)_{i \in I_{[x]}}$ et $\mathcal{A}_{[y]} = \big(\mu_{[y],i}\big)_{i \in I_{[y]}}$, associées respectivement aux restrictions de la valuation μ aux anneaux de polynômes $K[x]$ et $K[y]$, où x et y sont deux générateurs de l'extension L.

Pour cela nous devons d'abord connaître les relations qui existent entre deux générateurs, ce qui est donné par le résultat classique suivant.

Proposition 2.1. — *Le groupe $Aut_K(L)$ des automorphismes de $L = K(x)$ sur K est isomorphe au groupe projectif linéaire $PGL_2(K)$.*

A toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est associé l'automorphisme σ_M défini par

$$\sigma_M : x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

En particulier $Aut_K(L)$ est engendré par les automorphismes

$$\begin{aligned} inv : x &\longmapsto 1/x \\ t_{a,b} : x &\longmapsto ax+b, \quad a \in K^*, \ b \in K \ . \end{aligned}$$

Théorème 2.2. — *La famille admise associée à la valuation μ ne dépend pas du générateur x de L choisi.*

Preuve. — Soient L une extension transcendante pure de degré un de K et μ une valuation de L qui prolonge la valuation ν de K. Soient x et y deux générateurs de L sur K, nous appelons respectivement $\mathcal{A}_{[x]} = \left(\mu_{[x],i}\right)_{i \in I_{[x]}}$ et $\mathcal{A}_{[y]} = \left(\mu_{[y],i}\right)_{i \in I_{[y]}}$ les familles admises de valuations de L associées aux restrictions de μ aux anneaux des polynôme $K[x]$ et $K[y]$, et nous devons montrer que ces familles admissibles sont équivalentes.

D'après la proposition 2.1, il existe une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, et il suffit de considérer les cas $y = ax+b$, $a \neq 0$, et $y = 1/x$.

Nous remarquons que si y est égal à $ax+b$, avec $a \neq 0$, les anneaux $K[x]$ et $K[y]$ sont égaux et il est facile de voir que par construction nous pouvons trouver des familles $\mathcal{A}_{[x]} = \left(\mu_{[x],i}\right)_{i \in I_{[x]}}$ et $\mathcal{A}_{[y]} = \left(\mu_{[y],i}\right)_{i \in I_{[y]}}$ identiques.

Nous supposons maintenant que y est égal à $1/x$. Nous appelons $IU(K[x])$, respectivement $IU(K[y])$, l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $K[x]$, respectivement de $K[y]$, et nous définissons l'application $Inv_{x/y}$ de $IU(K[x])$ dans $K[y]$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Inv_{x/y}(x) &= y \\ Inv_{x/y}(\phi(x)) &= \psi(y) \ , \end{aligned}$$

avec

$$\psi(y) \ = (a_0^{-1}y^d)\phi(x) \ = \ y^d + (a_0^{-1}a_1)y^{d-1} + \ldots + (a_0^{-1}a_{d-1})y + a_0^{-1}$$

pour

$$\phi(x) \ = \ x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ \text{,avec } d \geq 1 \text{ et } a_0 \neq 0 \ .$$

L'application $Inv_{x/y}$ induit une bijection de $IU(K[x])$ dans $IU(K[y])$, et si nous définissons de manière analogue l'application $Inv_{y/x}$ de $IU(K[y])$ dans $IU(K[x])$, nous avons $(Inv_{x/y})^{-1} = Inv_{y/x}$.

Nous notons $\Phi_1(K[x])$ et $\Phi_1(K[y])$ les ensembles des polynômes unitaires de degré un respectivement dans $K[x]$ et dans $K[y]$, c'est-à-dire les ensembles des polynômes de degré un appartenant respectivement à $IU(K[x])$ et à $IU(K[y])$. Pour toute valuation μ de $K(x)$ nous définissons les deux sous-ensembles du groupe des valeurs de μ, $\Lambda_{\mu,1}(K[x]) = \{\mu(\phi) \mid \phi \in \Phi_1(K[x])\}$ et $\Lambda_{\mu,1}(K[y]) = \{\mu(\psi) \mid \psi \in \Phi_1(K[y])\}$.

Lemme 2.3. — *Si l'ensemble $\Lambda_{\mu,1}(K[x])$ a un plus grand élément γ_1 et si ϕ_1 est un polynôme unitaire de degré un dans $K[x]$ tel que $\mu(\phi_1) = \gamma_1$, alors l'ensemble $\Lambda_{\mu,1}(K[y])$ a un plus grand élément δ_1 et le polynôme unitaire de degré un ψ_1 défini par $\psi_1 = Inv_{x/y}(\phi_1)$ vérifie $\mu(\psi_1) = \delta_1$.*

Si l'ensemble $\Lambda_{\mu,1}(K[x])$ n'a pas de plus grand élément et si $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille de polynômes unitaires de degré un dans $K[x]$ indexée par un ensemble totalement ordonné A sans plus grand élément, telle que la famille $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$, avec $\gamma_\alpha = \mu(\phi_\alpha)$, vérifie $\gamma_\beta > \gamma_\alpha$ pour $\beta > \alpha$ et est cofinale dans $\Lambda_{\mu,1}(K[x])$, alors l'ensemble $\Lambda_{\mu,1}(K[y])$ n'a pas de plus grand élément et la famille $(\delta_\alpha)_{\alpha\in A}$ définie par $\delta_\alpha = \mu(\psi_\alpha)$ où $\psi_\alpha = Inv_{x/y}(\phi_\alpha)$ est cofinale dans $\Lambda_{\mu,1}(K[y])$.

Preuve du lemme. — Supposons d'abord que l'ensemble $\Lambda_{\mu,1}(K[x])$ a un plus grand élément, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme unitaire de degré un ϕ_1 dans $K[x]$ tel que $\mu(\phi_1) \geq \mu(\phi)$ pour tout $\phi \in \Phi_1(K[x])$.

Considérons le cas $\phi_1(x) = x$, c'est-à-dire le cas $\mu(x) \geq \mu(x+c)$ pour tout $c \in K$, et par définition le polynôme $\psi_1 = Inv_{x/y}(\phi_1)$ est égal à $\psi_1(y) = y$. Nous avons alors pour tout $d \in K^*$ l'inégalité

$$\mu(y+d) = \mu(dy) + \mu(x+d^{-1}) \leq \mu(d) + \mu(y) + \mu(x) = \mu(d) \ ,$$

dont nous déduisons l'inégalité

$$\mu(y+d) \leq \mu(y) \ ,$$

c'est-à-dire $\mu(\psi_1) \geq \mu(\psi)$ pour tout $\psi \in \Phi_1(K[y])$.

Considérons maintenant le cas $\phi_1(x) = x + c_0$ avec $c_0 \neq 0$, nous avons $\mu(x+c_0) \geq \mu(x+c)$ pour tout $c \in K$, et nous pouvons supposer que nous avons $\mu(x+c_0) > \mu(x)$, d'où $\mu(x) = \mu(c_0)$. Le polynôme $\psi_1 = Inv_{x/y}(\phi_1)$ est alors égal à $\psi_1(y) = y + d_0$ avec $d_0 = {c_0}^{-1}$, et nous avons $\mu(y) = \mu(d_0) = -\mu(x)$.

Supposons qu'il existe $d \in K$ tel que $\mu(y+d) > \mu(y+d_0)$, d'où $\mu(y+d_0) = \mu(d-d_0)$. Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \mu(x+c_0) = \mu(xc_0) + \mu(y+d_0) &< \mu(xc_0) + \mu(y+d) \\ &= \mu(xc_0) + \mu(yd) + \mu(x+d^{-1}) \\ &\leq \mu(c_0 d) + \mu(x+c_0) \ , \end{aligned}$$

d'où $\mu(c_0 d) = \mu(d/d_0) > 0$ et $\mu(d) > \mu(d_0) = \mu(d-d_0)$. Nous avons alors les deux inégalités $\mu(d) > \mu(y)$ et $\mu(y+d) > \mu(y)$, ce qui est impossible. Par conséquent le polynôme ψ_1 vérifie bien $\mu(\psi_1) \geq \mu(\psi)$ pour tout $\psi \in \Phi_1(K[y])$.

Supposons maintenant que l'ensemble $\Lambda_{\mu,1}(K[x])$ n'a pas de plus grand élément et soit $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de polynômes de $K[x]$ vérifiant les hypothèses du lemme. Nous pouvons écrire $\phi_\alpha(x) = x + c_\alpha$, et quitte à se restreindre à un sous ensemble cofinal dans A nous pouvons supposer que pour tout $\alpha \in A$ nous avons l'inégalité $\gamma_\alpha = \mu(\phi_\alpha) > \mu(x)$, d'où $\mu(c_\alpha) = \mu(x)$.

Pour tout α le polynôme unitaire ψ_α de $\Phi_1(K[y])$ défini par $\psi_\alpha = Inv_{x/y}(\phi_\alpha)$ est égal à $\psi_\alpha(y) = (y + d_\alpha)$, avec $d_\alpha = c_\alpha^{-1}$. En particulier nous avons $\psi_\alpha = \phi_\alpha(xc_\alpha)^{-1}$, $\delta_\alpha = \mu(\psi_\alpha)$ est égal à $\gamma_\alpha - 2\mu(x)$, et nous déduisons de l'inégalité $\gamma_\alpha = \mu(\phi_\alpha) > \mu(x)$ que nous avons $\delta_\alpha > \mu(y) = \mu(d_\alpha)$, par conséquent pour tout $\beta > \alpha$ nous avons l'inégalité $\delta_\beta > \delta_\alpha$.

Si $\psi(y) = y + d$ vérifie $\mu(\psi) > \mu(\psi_\alpha)$ pour $\alpha \in A$, le polynôme ψ est égal à $Inv_{x/y}(\phi)$ pour un polynôme $\phi(x) = x + c$, avec l'égalité $\psi = (yd)\phi$ et $c = d^{-1}$. Il existe alors β dans A tel que $\gamma_\beta > \mu(\phi)$ d'où $\delta_\beta > \mu(\psi)$, nous en déduisons que la famille $(\delta_\alpha)_{\alpha\in A}$ est cofinale dans $\Lambda_{\mu,1}(K[y])$.

□

Montrons que les premières valuations des familles $\mathcal{A}_{[x]}$ et $\mathcal{A}_{[y]}$ coïncident. Nous notons respectivement $\mathcal{S}_{[x]}^{(j)} = \big(\mathcal{D}_{[x]}^{(j)};\mathcal{C}_{[x]}^{(j)}\big)$ et $\mathcal{S}_{[y]}^{(j)} = \big(\mathcal{D}_{[y]}^{(j)};\mathcal{C}_{[y]}^{(j)}\big)$ les sous-familles admissibles simples de $\mathcal{A}_{[x]}$ et $\mathcal{A}_{[y]}$, constituées de leur parties discrètes et continues.

Nous rappelons que pour tout polynôme ϕ dans $\Phi_1(K[x])$ et toute valeur γ nous pouvons définir une valuation $\mu_{[x]}^{[\phi,\gamma]}$ de L comme la valuation augmentée de $K[x]$ définie par

$$\mu_{[x]}^{[\phi,\gamma]} \ = \ [\nu \ ; \ \mu_{[x]}^{[\phi,\gamma]}(\phi) = \gamma] \ .$$

Plus précisément pour tout polynôme f dans $K[x]$ nous avons

$$\mu_{[x]}^{[\phi,\gamma]}(f) = Inf\,(\nu(a_j) + j\gamma \ ; \ 0 \le j \le n) \ \ ,$$

où $f = a_n\phi^n + \ldots + a_1\phi + a_0$, et $a_j \in K$.

La partie discrète $\mathcal{D}_{[x]}^{(1)}$ de la première sous-famille admissible simple de $\mathcal{A}_{[x]}$ n'est pas réduite à une seule valuation si l'ensemble $\Lambda_{\mu,1}(K[x]) = \{\mu(\phi) \mid \phi \in \Phi_1(K[x])\}$ a un plus grand élément γ_1. Dans ce cas la première valuation $\mu_{[x],1}^{(1)}$ de la famille $\mathcal{A}_{[x]}$ est la première valuation de $\mathcal{D}_{[x]}^{(1)}$ et est égale à

$$\mu_{[x],1}^{(1)} \ = \ \mu_{[x]}^{[\phi_1,\gamma_1]} \ ,$$

où ϕ_1 est un polynôme de $\Phi_1(K[x])$ tel que $\mu(\phi_1) = \gamma_1$.

De plus si la valuation μ n'est pas égale à $\mu_{[x],1}^{(1)}$, la deuxième valuation $\mu_{[x],2}^{(1)}$ de la famille $\mathcal{A}_{[x]}$ est obtenue comme valuation augmentée de la valuation $\mu_{[x],1}^{(1)}$ associée à un polynôme ϕ_2 de degré $d \ge 2$:

$$\mu_{[x],2}^{(1)} \ = \ [\mu_{[x],1}^{(1)} \ ; \ \mu_{[x],2}^{(1)}(\phi_2) = \gamma_2] \ .$$

La partie discrète $\mathcal{D}_{[x]}^{(1)}$ est réduite à une seule valuation si l'ensemble $\Lambda_{\mu,1}(K[x])$ n'a pas de plus grand élément. Dans ce cas nous pouvons choisir comme première valuation $\mu_{[x],1}^{(1)}$ de la famille $\mathcal{A}_{[x]}$ la valuation augmentée associée à n'importe quel polynôme ϕ_1 de $\Phi_1(K[x])$ et à la valeur $\gamma_1 = \mu(\phi_1)$:

$$\mu_{[x],1}^{(1)} \ = \ [\nu \ ; \ \mu_{[x],1}^{(1)}(\phi_1) = \gamma_1] \ ,$$

ainsi qu'une famille $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ de polynômes unitaires de degré un dans $K[x]$ indexée par un ensemble totalement ordonné A sans plus grand élément, telle que la famille $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$, avec $\gamma_\alpha = \mu(\phi_\alpha)$, vérifie $\gamma_\beta > \gamma_\alpha > \gamma_1$ pour tout $\beta > \alpha$ et soit cofinale dans $\Lambda_{\mu,1}(K[x])$. La partie continue $\mathcal{C}^{(1)}_{[x]}$ est alors constituée des valuations augmentée $\mu^{(1)}_{[x],\alpha}$ associées aux polynômes ϕ_α et aux valeurs γ_α :

$$\mu^{(1)}_{[x],\alpha} \; = \; [\nu \; ; \; \mu^{(1)}_{[x],\alpha}(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha] \; = \; [\mu^{(1)}_{[x],1} \; ; \; \mu^{(1)}_{[x],\alpha}(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha] \; .$$

De plus si la valuation μ n'est pas égale à la valuation limite, c'est-à-dire s'il existe $f \in K[x]$ tel que $\mu^{(1)}_{[x],\alpha}(f) < \mu(f)$ pour tout α dans A, la famille $\mathcal{A}_{[x]}$ contient une deuxième sous-famille admissible simple et la premième valuation $\mu^{(2)}_{[x],1}$ de la partie discrète $\mathcal{D}^{(2)}_{[x]}$ est obtenue comme valuation augmentée limite de la famille $\big(\mu^{(1)}_{[x],\alpha}\big)_{\alpha\in A}$ associée à un polynôme $\phi^{(2)}_1$ de degré $d \geq 2$:

$$\mu^{(2)}_{[x],1} \; = \; \Big[\big(\mu^{(1)}_{[x],\alpha}\big)_{\alpha\in A} \; ; \; \mu^{(2)}_{[x],1}(\phi^{(2)}_1) = \gamma^{(2)}_1\Big] \; .$$

Supposons d'abord que l'ensemble $\Lambda_{\mu,1}(K[x]) = \{\mu(\phi) \mid \phi \in \Phi_1(K[x])\}$ a un plus grand élément γ_1, et soit ϕ_1 un polynôme de $\Phi_1(K[x])$ tel que $\mu(\phi_1) = \gamma_1$, alors la valuation $\mu^{(1)}_{[x],1}$ est la valuation augmentée $\mu^{(1)}_{[x],1} \; = \; \mu^{[\phi_1,\gamma_1]}_{[x]}$ de $K[x]$.

D'après le lemme 2.3 l'ensemble $\Lambda_{\mu,1}(K[y]) = \{\mu(\psi) \mid \psi \in \Phi_1(K[y])\}$ a un plus grand élément δ_1, et le polynôme unitaire de degré un ψ_1 dans $K[y]$ défini par $\psi_1 = Inv_{x/y}(\phi_1)$ vérifie $\mu(\psi_1) = \delta_1$. Alors de la même manière la valuation $\mu^{(1)}_{[y],1}$ est la valuation augmentée $\mu^{(1)}_{[y],1} \; = \; \mu^{[\psi_1,\delta_1]}_{[y]}$ de $K[y]$.

Si le polynôme $\phi_1(x)$ est égal à x alors ψ_1 est égal à y et $\mu(y) = \delta_1 = -\gamma_1 = -\mu(x)$. Pour tout polynôme $f = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ dans $K[x]$, nous posons $g = y^n f$, d'où $g = a_0 y^n + \ldots + a_{n-1} y + a_n$, et nous trouvons d'après ce qui précède

$$\begin{array}{rcl} \mu^{(1)}_{[y],1}(f) & = & \mu^{(1)}_{[y],1}(y^{-n} g) \\ & = & -n\delta_1 + Inf\,(\nu(a_j) + (n-j)\delta_1 \; ; \; 0 \leq j \leq n) \\ & = & Inf\,(\nu(a_j) + j\gamma_1 \; ; \; 0 \leq j \leq n) \\ & = & \mu^{(1)}_{[x],1}(f) \; . \end{array}$$

Si le polynôme $\phi_1(x)$ est égal à $x + c_0$ avec $c_0 \neq 0$, alors $\psi_1(y)$ est égal à $y + d_0$ avec $d_0 = c_0^{-1}$ si et $\psi_1 = (yd_0)\phi_1$, et nous pouvons supposer $\mu(\phi_1) > \mu(x) = \mu(c_0)$, d'où $\mu(\psi_1) > \mu(y) = \mu(d_0)$. Si nous posons $\gamma_0 = \mu(x) = -\mu(y) = -\delta_0$ nous avons l'égalité

$$\mu(\psi_1) = \delta_1 = \gamma_1 + 2\delta_0 = \mu(\phi_1) + 2\delta_0 \; .$$

Soit $\mu^{(1)}_{[x],0}$ la valuation de $K[x]$ définie par

$$\mu^{(1)}_{[x],0} \; = \; [\nu \; ; \; \mu^{(1)}_{[x],0}(\phi_0) = \gamma_0] \; ,$$

avec $\phi_0 = x$ et $\gamma_0 = \mu(x)$, alors le polynôme ϕ_1 est un polynôme-clé pour $\mu^{(1)}_{[x],0}$ et $\mu^{(1)}_{[x],0}(\phi_1) = \gamma_0$. D'après le lemme 15.1. de [**McL 1**] la valuation $\mu^{(1)}_{[x],1}$ est égale à la valuation augmentée $[\mu^{(1)}_{[x],0}\ ;\ \mu^{(1)}_{[x],1}(\phi_1)=\gamma_1]$ et comme x n'est pas $\mu^{(1)}_{[x],0}$-divisible par ϕ_1, nous déduisons du théorème 5.2. de [**McL 1**] que pour tout polynôme f de $K[x]$ qui s'écrit sous la forme $f=a_nx^{e_n}\phi_1^n+\ldots+a_1x^{e_1}\phi_1+a_0x^{e_0}$, avec $e_j\in\mathbb{N}$ et $a_j\in K$ nous avons l'égalité

$$\mu^{(1)}_{[x],1}(f)=Inf\,(\nu(a_j)+e_j\gamma_0+j\gamma_1\ ;\ 0\le j\le n)\ .$$

De même, si nous posons $\mu(y)=\delta_0$, pour tout polynôme g de $K[y]$ qui s'écrit sous la forme $g=b_ny^{e_n}\psi_1^n+\ldots+b_1y^{e_1}\psi_1+b_0y^{e_0}$, avec $e_j\in\mathbb{N}$ et $b_j\in K$ nous avons l'égalité

$$\mu^{(1)}_{[y],1}(g)=Inf\,(\nu(b_j)+e_j\delta_0+j\delta_1\ ;\ 0\le j\le n)\ .$$

Pour tout polynôme $f=a_n\phi_1^n+\ldots+a_1\phi_1+a_0$ dans $K[x]$, avec $a_j\in K$, nous posons $g=(yd_0)^nf$, d'où

$$\begin{array}{rcl} g &=& a_0(yd_0\phi_1)^n+\ldots+a_j(yd_0)^{n-j}(yd_0\phi_1)^j+\cdots+a_{n-1}(yd_0)^{n-1}(yd_0\phi_1)+a_n(yd_0)^n \\ &=& a_0\psi_1^n+\ldots+a_j(yd_0)^{n-j}\psi_1^j+\cdots+a_{n-1}(yd_0)^{n-1}\psi_1+a_n(yd_0)^n\ , \end{array}$$

et nous trouvons d'après ce qui précède

$$\begin{array}{rcl} \mu^{(1)}_{[y],1}(f) &=& \mu_{[y],1}((yd_0)^{-n}g) \\ &=& -2n\delta_0+Inf\,(\nu(a_j)+2(n-j)\delta_0+j\delta_1\ ;\ 0\le j\le n) \\ &=& Inf\,(\nu(a_j)+j(\delta_1-2\delta_0)\ ;\ 0\le j\le n) \\ &=& Inf\,(\nu(a_j)+j\gamma_1\ ;\ 0\le j\le n) \\ &=& \mu^{(1)}_{[x],1}(f)\ . \end{array}$$

Supposons qu'il n'existe pas de polynôme unitaire de degré un ϕ_1 dans $K[x]$ tel que $\mu(\phi_1)\ge\mu(x+c)$ pour tout $c\in K$ et soit comme précédemment $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de polynômes unitaires de degré un dans $K[x]$ indexée par un ensemble totalement ordonné A sans plus grand élément, telle que la famille $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$, avec $\gamma_\alpha=\mu(\phi_\alpha)$, vérifie $\gamma_\beta>\gamma_\alpha$ pour $\beta>\alpha$ et soit cofinale dans $\Lambda_{\mu,1}(K[x])=\{\mu(\phi)\mid\phi\in\Phi_1(K[x])\}$, et vérifie $\mu(\phi_\alpha)>\mu(x)$ pour tout α dans A.

Posons $A^{(1)}_{[x]}=A$, alors pour tout α dans $A^{(1)}_{[x]}$ nous définissons la valuation augmentée $\mu^{(1)}_{[x],\alpha}=[\nu\ ;\ \mu^{(1)}_{[x],\alpha}(\phi_\alpha)=\gamma_\alpha]$ sur $K[x]$, et la famille $\mathcal{C}^{(1)}_{[x]}=\big(\mu^{(1)}_{[x],\alpha}\big)_{\alpha\in A^{(1)}_{[x]}}$ est une famille admissible continue. Nous pouvons choisir comme première famille admissible simple $\mathcal{S}^{(1)}_{[x]}$ de la famille admise $\mathcal{A}_{[x]}$ la réunion

$$\mathcal{S}^{(1)}_{[x]}\ =\ \Big(\mathcal{D}^{(1)}_{[x]};\mathcal{C}^{(1)}_{[x]}\Big)\ =\bigg((\mu^{(1)}_{[x],1});\big(\mu^{(1)}_{[x],\alpha}\big)_{\alpha\in A^{(1)}_{[x]}}\bigg)\ ,$$

où la valuation augmentée $\mu^{(1)}_{[x],1}$ est la valuation associée au polynôme $\phi^{(1)}_{[x],1}=x$.

D'après le lemme précédent l'ensemble $\Lambda_{\mu,1}(K[y])$ n'a pas de plus grand élément et la famille $(\delta_\alpha)_{\alpha\in A}$ définie par $\psi_\alpha=\mu\big(Inv_{x/y}(\phi_\alpha)\big)$ est cofinale dans $\Lambda_{\mu,1}(K[y])$, et vérifie $\mu(\psi_\alpha)>\mu(y)$ pour tout α dans A.

De manière analogue nous posons $A^{(1)}_{[y]}=A$, pour tout α dans $A^{(1)}_{[y]}$ nous définissons la valuation augmentée $\mu^{(1)}_{[y],\alpha}=[\nu\ ;\ \mu^{(1)}_{[y],\alpha}(\psi_\alpha)=\delta_\alpha]$ sur $K[y]$, et nous pouvons choisir comme première famille admissible simple $\mathcal{S}_{[y]}^{(1)}$ de la famille admise $\mathcal{A}_{[y]}$ la réunion

$$\mathcal{S}_{[y]}^{(1)} \;=\; \left(\mathcal{D}_{[y]}^{(1)}; \mathcal{C}_{[y]}^{(1)}\right) \;=\left((\mu_{[y],1}^{(1)}); \left(\mu_{[y],\alpha}^{(1)}\right)_{\alpha \in A_{[y]}^{(1)}} \right) \;,$$

où la valuation augmentée $\mu_{[y],1}^{(1)}$ est la valuation associée au polynôme $\psi_{[y],1}^{(1)} = y$.

Comme nous avons supposé $\mu(\phi_\alpha) > \mu(x)$ pour tout α dans A, nous montrons comme précédemment que les valuations $\mu_{[x],\alpha}^{(1)}$ et $\mu_{[y],\alpha}^{(1)}$ sont égales comme valuations sur L. Par conséquent les deux premières familles admissibles simples $\mathcal{S}_{[x]}^{(1)}$ et $\mathcal{S}_{[y]}^{(1)}$ sont égales.

Supposons maintenant que les familles $\mathcal{A}_{[x]} = \left(\mu_{[x],i}\right)_{i \in I_{[x]}}$ et $\mathcal{A}_{[y]} = \left(\mu_{[y],i}\right)_{i \in I_{[y]}}$ sont les mêmes jusqu'à l'indice k, plus précisément les ensembles $\{j \in I_{[x]} \mid j \leq k\}$ et $\{j \in I_{[y]} \mid j \leq k\}$ sont identiques, pour tout j dans ces ensembles les valuations $\mu_{[x],j}$ et $\mu_{[y],j}$ sont égales comme valuations de L, et de plus si la valuation $\mu_{[x],j}$ est définie par le polynôme-clé, respectivement le polynôme-clé limite, $\phi_j(x)$ de degré d_j, la valuation $\mu_{[y],j}$ est définie par le polynôme-clé, respectivement le polynôme-clé limite, $\psi_j(y)$ de degré d_j avec $\psi_j(y) = Inv_{x/y}(\phi_j(x))$. Nous notons μ_j la valuation de L égale à $\mu_{[x],j} = \mu_{[y],j}$.

De plus les valeurs associées aux valuations augmentées, $\gamma_j = \mu(\phi_j) = \mu_k(\phi_j)$ et $\delta_j = \mu(\psi_j) = \mu_k(\psi_j)$, sont reliées par les relations suivantes :

$$\mu(\phi_k) - \mu_j(\phi_k) = \mu(\psi_k) - \mu_j(\psi_k) \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq k \;.$$

Nous rappelons la construction de la famille admise $\mathcal{A}_{[x]} = \left(\mu_{[x],i}\right)_{i \in I_{[x]}}$ associée à la valuation μ, si la valuation $\mu_{[x],k}$ n'est pas égale à la valuation μ, l'ensemble

$$\tilde{\Phi}_\mu(\mu_{[x],k}) \;=\; \{f \in K[x] \mid \mu_{[x],k}(f) < \mu(f)\} \;,$$

est non vide et pour déterminer les valuations $\mu_{[x],l}$ pour $l > k$ nous devons considérer l'ensemble suivant

$$\Phi_\mu(\mu_{[x],k}) \;=\; \{\phi \in K[x] \mid \mu_{[x],k}(\phi) < \mu(\phi) \;,\; \deg\phi = d_{[x],k} \text{ et } \phi \text{ unitaire}\} \;,$$

où $d_{[x],k}$ est le degré minimal des polynômes appartenant à $\tilde{\Phi}_\mu(\mu_{[x],k})$, et $d_{[x],k} \geq d_k$.

Tout polynôme ϕ appartenant à $\Phi_\mu(\mu_{[x],k})$ est irréductible, de degré $d_{[x],k} \geq 1$, avec $\phi \neq x$, en particulier il est de la forme $\phi(x) \;=\; x^{d_{[x],k}} + \ldots + a_1 x + a_0$ avec $a_0 \neq 0$.

Lemme 2.4. — *L'application $Inv_{x/y}$ induit une bijection de $\Phi_\mu(\mu_{[x],k})$ dans $\Phi_\mu(\mu_{[y],k})$.*

Preuve du lemme. — Pour tout polynôme $f(x)$ dans $IU(K[x])$ de degré d, le polynôme $g(y) = Inv_{x/y}(f(x)) = (a_0^{-1}y^d)f(x)$ est de même degré d et nous déduisons de l'égalité $\mu_i(a_0^{-1}y^d) = \mu(a_0^{-1}y^d)$ l'équivalence suivante :

$$\mu_{[x],k}(f(x)) < \mu(f(x)) \iff \mu_{[y],k}(g(y)) < \mu(g(y)) \;.$$

$\square$

Soient ϕ un polynôme appartenant à $\Phi_\mu(\mu_{[x],k})$, avec $\gamma = \mu(\phi)$, et ψ son image $\psi = Inv_{x/y}(\phi)$ qui appartient à $\Phi_\mu(\mu_{[y],k})$, avec $\delta = \mu(\psi)$. Nous considérons alors les valuations $\mu_{\phi,\gamma}$ et $\mu_{\psi,\delta}$ de L, définies respectivement comme valuation augmentée pour la valuation μ_i sur $K[x]$ associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ, et sur $K[y]$ associée au polynôme-clé ψ et à la valeur δ :

$$\mu_{\phi,\gamma} = [\mu_k \ ; \ \mu_{\phi,\gamma}(\phi) = \gamma] \quad \text{et} \quad \mu_{\psi,\delta} = [\mu_k \ ; \ \mu_{\psi,\delta}(\psi) = \delta] \ .$$

Lemme 2.5. — *Les valuations $\mu_{\phi,\gamma}$ et $\mu_{\psi,\delta}$ sont égales.*

Preuve du lemme. — Nous appelons $d_{>k}$ le degré des polynômes ϕ de $K[x]$ et ψ de $K[y]$, $d_{>k} = d_{[x],k} = d_{[y],k}$, nous notons a le coefficient de degré 0 de ϕ, $a \in K^*$, de telle façon que nous ayons l'égalité

$$\psi = Inv_{x/y}(\phi) = (a^{-1} y^{d_{>k}})\phi \ .$$

Soit f appartenant à $K[x]$, et soit $f = f_m\phi^m + \ldots + f_1\phi + f_0$ le développement de f selon les puissances de ϕ. Alors par définition de la valuation augmentée $\mu_{\phi,\gamma}$ nous avons

$$\mu_{\phi,\gamma}(f) = Inf\big(\mu_i(f_j) + j\gamma \ ; \ 0 \le j \le m\big) \ .$$

Soit s le degré du polynôme f_m, par conséquent le degré de f est égal à $n = s + md_{>k}$, et l'élément $g = y^n f$ de L appartient à l'anneau de polynômes $K[y]$. Et dans $K[y]$ nous avons l'égalité suivante :

$$g \ = \ (a^m y^s f_m)(a^{-1} y^{d_{>k}}\phi)^m + \ldots + (a^j y^{n-jd_{>k}} f_j)(a^{-1} y^{d_{>k}}\phi)^j + \ldots + (a^m y^n f_0) \ ,$$

c'est-à-dire que nous pouvons écrire $g = g_m\psi^m + \ldots + g_1\phi + g_0$ où chaque polynôme g_j de $K[y]$ vérifie $\mu_k(g_j) = \mu(g_j)$. Nous déduisons du théorème 5.2. [**McL 1**] que nous avons l'égalité

$$\mu_{\psi,\delta}(g) = Inf\big(\mu_k(g_j) + j\delta \ ; \ 0 \le j \le m\big) \ .$$

Par construction pour tout j nous avons

$$\mu_k(g_j) + j\delta \ = \ \mu_k(f_j) + j\gamma + \mu_k(y^n) \ ,$$

par conséquent nous en déduisons bien $\mu_{\phi,\gamma}(f) = \mu_{\psi,\delta}(f)$ pour tout f dans $K[x]$, donc pour tout f dans L.

□

Nous revenons aux deux sous-ensembles $\Phi_\mu(\mu_{[x],k})$ de $K[x]$ et $\Phi_\mu(\mu_{[y],k})$ de $K[y]$ formés de polynômes unitaires de même degré $d_{>k}$, et aux deux sous-ensembles du groupe des valeurs $\Lambda_\mu(\mu_{[x],k}) = \{\mu(\phi) \mid \phi \in \Phi_\mu(\mu_{[x],k})\}$ et $\Lambda_\mu(\mu_{[y],k}) = \{\mu(\psi) \mid \psi \in \Phi_\mu(\mu_{[y],k})\}$.

Supposons d'abord que $\Lambda_\mu(\mu_{[x],k})$ a un plus grand élément γ et choisissons un polynôme ϕ dans $\Phi_\mu(\mu_{[x],k})$, tel que $\mu(\phi) = \gamma$. Alors si nous notons comme précédement $\mu_{\phi,\gamma}$ la valuation augmentée pour la valuation μ_k associée au polynôme ϕ et à la valeur γ, tout polynôme f de $K[x]$ de degré $deg(f) \le d_{>k}$ vérifie $\mu_{\phi,\gamma}(f) = \mu(f)$. Nous en déduisons que la valuation μ_k appartient à une sous-famille discrète $\mathcal{D}^{(j)}_{[x]}$ de la famille admise $\mathcal{A}_{[x]}$, et n'est pas égale à la dernière valuation de cette sous-famille, l'élément k admet un successeur $k+1$ dans l'ensemble d'indices $I_{[x]}$, la valuation augmentée $\mu_{\phi,\gamma}$ est la valuation $\mu_{[x],k+1}$ de la famille admise $\mathcal{A}_{[x]}$ et elle appartient encore à la sous-famille discrète $\mathcal{D}^{(j)}_{[x]}$, nous notons ϕ_{k+1} le polynôme-clé ϕ et nous avons $\text{deg}\phi_{k+1} = d_{k+1} = d_{>k}$.

D'après le lemme 2.4 nous en déduisons que $\Lambda_\mu(\mu_{[y],k})$ a un plus grand élément δ, que le polynôme $\psi = Inv_{x/y}(\phi)$ de $\Phi_\mu(\mu_{[y],k})$ vérifie $\mu(\psi) = \delta$ et que tout polynôme g de $K[y]$ de degré $deg(g) \leq d_{>k}$ vérifie $\mu_{\psi,\delta}(g) = \mu(g)$. De façon analogue la valuation μ_k appartient à une sous-famille discrète $\mathcal{D}^{(j)}_{[y]}$ de la famille admise $\mathcal{A}_{[y]}$, n'est pas égale à la dernière valuation de cette sous-famille, l'élément k admet un successeur $k+1$ dans l'ensemble d'indices $I_{[y]}$, la valuation augmentée $\mu_{\psi,\delta}$ est la valuation $\mu_{[y],k+1}$, et nous notons ψ_{k+1} le polynôme-clé ψ de degré $d_{k+1} = d_{>k}$.

Par conséquent les ensembles $\{j \in I_{[x]} \mid j \leq k+1\}$ et $\{j \in I_{[y]} \mid j \leq k+1\}$ sont identiques, et d'après le lemme précédent les familles $\mathcal{A}_{[x]} = \left(\mu_{[x],k}\right)_{i \in I_{[x]}}$ et $\mathcal{A}_{[y]} = \left(\mu_{[y],k}\right)_{i \in I_{[y]}}$ sont les mêmes jusqu'à l'indice $k+1$, et nous posons $\mu_{k+1} = \mu_{[x],k+1} = \mu_{[y],k+1}$.

Supposons maintenant que $\Lambda_\mu(\mu_{[x],k})$ n'a pas de plus grand élément et que nous avons l'inégalité stricte $d_{>k} > d_k$, alors nous sommes dans le cas où la valuation μ_k est l'avant-dernière valuation d'une sous-famille admissible discrète $\mathcal{D}^{(j)}_{[x]}$ de la famille admise $\mathcal{A}_{[x]}$. Nous choisissons une valeur γ_{k+1} dans $\Lambda_\mu(\mu_{[x],k})$ et un polynôme ϕ_{k+1} dans $\Phi_\mu(\mu_{[x],k})$ tel que $\mu(\phi_{k+1}) = \gamma_{k+1}$ et nous définissons comme précédemment la valuation $\mu_{[x],k+1}$ comme la valuation augmentée $\mu_{\phi_{k+1},\gamma_{k+1}}$. Cette valuation est alors la dernière valuation de la sous-famille $\mathcal{D}^{(j)}_{[x]}$, et nous avons $\text{deg}\phi_{k+1} = d_{k+1} = d_{>k}$.

Nous déduisons du lemme 2.4 que $\Lambda_\mu(\mu_{[y],k})$ n'a pas non plus de plus grand élément, alors la valuation μ_k est aussi l'avant-dernière valuation d'une sous-famille admissible discrète $\mathcal{D}^{(j)}_{[y]}$ de la famille admise $\mathcal{A}_{[y]}$, et de la même manière que précédemment, si nous choisissons le polynôme ψ_{k+1} dans $\Phi_\mu(\mu_{[y],k})$ égal à $Inv_{x/y}(\phi_{k+1})$ et définissons la valuation $\mu_{[y],k+1}$ comme la valuation augmentée $\mu_{\psi_{k+1},\delta_{k+1}}$, avec $\delta_{k+1} = \mu(\psi_{k+1})$, les valuations $\mu_{[x],k+1}$ et $\mu_{[y],k+1}$ sont égales. Par conséquent les ensembles $\{j \in I_{[x]} \mid j \leq k+1\}$ et $\{j \in I_{[y]} \mid j \leq k+1\}$ sont identiques, et d'après le lemme précédent les familles $\mathcal{A}_{[x]} = \left(\mu_{[x],k}\right)_{i \in I_{[x]}}$ et $\mathcal{A}_{[y]} = \left(\mu_{[y],k}\right)_{i \in I_{[y]}}$ sont les mêmes jusqu'à l'indice $k+1$, et nous posons $\mu_{k+1} = \mu_{[x],k+1} = \mu_{[y],k+1}$.

Supposons enfin que $\Lambda_\mu(\mu_{[x],k})$ n'a pas de plus grand élément et que nous avons l'égalité stricte $d_{>k} = d_k$, alors nous pouvons supposer que la valuation μ_k est la dernière valuation d'une sous-famille admissible discrète $\mathcal{D}^{(j)}_{[x]}$ de la famille $\mathcal{A}_{[x]}$.

Il existe une famille $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de polynômes appartenant à $\Phi_\mu(\mu_{[x],k})$ indexée par un ensemble totalement ordonné A, sans plus grand élément, telle que la famille des valeurs $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$, où $\gamma_\alpha = \mu(\phi_\alpha)$ est cofinale dans $\Lambda_\mu(\mu_{[x],k})$. La famille de valuations augmentées associée $(\mu_{\phi_\alpha,\gamma_\alpha})_{\alpha \in A}$ est une famille admissible continue de valuations de $K[x]$, et en particulier pour tout $\alpha < \beta$ dans A le polynôme ϕ_β appartient à l'ensemble $\Phi_\mu(\mu_{\phi_\alpha,\gamma_\alpha})$. Nous posons $A^{(j)}_{[x]} = A$, et pour tout α nous posons $\mu^{(j)}_{[x],\alpha} = \mu_{\phi_\alpha,\gamma_\alpha}$, alors la famille $\mathcal{C}^{(j)}_{[x]} = \big(\mu^{(j)}_{[x],\alpha}\big)_{\alpha\in A^{(j)}_{[x]}}$ est la partie continue de la sous-famille admissible simple $\mathcal{S}^{(j)}_{[x]}$ de la famille admise $\mathcal{A}_{[x]}$.

De ce qui précède nous en déduisons que la valuation μ_k est aussi la dernière valuation d'une sous-famille admissible discrète $\mathcal{D}^{(j)}_{[y]}$ de la famille $\mathcal{A}_{[y]}$, et que la famille $\mathcal{C}^{(j)}_{[y]} = \big(\mu^{(j)}_{[y],\alpha}\big)_{\alpha\in A^{(j)}_{[y]}}$ est la partie continue de la sous-famille admissible simple $\mathcal{S}^{(j)}_{[y]}$ de la famille admise $\mathcal{A}_{[y]}$. Si nous posons encore $A^{(j)}_{[y]} = A$ et $\mu^{(j)}_{[y],\alpha} = \mu_{\psi_\alpha,\delta_\alpha}$, avec $\psi_\alpha = Inv_{x/y}(\phi_\alpha)$ et $\delta_\alpha = \mu(\psi_\alpha)$, les valuations $\mu^{(j)}_{[x],\alpha}$ et $\mu^{(j)}_{[y],\alpha}$ sont égales.

Par conséquent les j premières sous-familles admissibles simples des familles admises $\mathcal{A}_{[x]}$ et $\mathcal{A}_{[y]}$ coïncident et il reste à montrer que si la valuation μ est différente de la valuation limite de la famille continue $\mathcal{C}^{(j)} = \big(\mu^{(j)}_\alpha\big)_{\alpha\in A^{(j)}}$, les premières valuations des sous-familles admissibles respectivement $\mathcal{S}^{(j+1)}_{[x]}$ et $\mathcal{S}^{(j+1)}_{[y]}$ sont égales.

Comme ces valuations $\mu^{(j+1)}_{[x],1}$ et $\mu^{(j+1)}_{[y],1}$ sont obtenues comme valuations augmentées limites de la famille continue $\mathcal{C}^{(j)}$ nous devons considérer les ensembles :

$$\tilde{\Phi}_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big) \;=\; \{f\in K[x] \mid \mu^{(j)}_\alpha(f) < \mu^{(j)}_\beta(f), \forall \alpha<\beta\in A^{(j)}\}$$

et

$$\tilde{\Phi}_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big) \;=\; \{g\in K[y] \mid \mu^{(j)}_\alpha(g) < \mu^{(j)}_\beta(g), \forall \alpha<\beta\in A^{(j)}\}$$

Par hypothèse ces ensembles sont non vides, nous appelons respectivement $d_{[x],\mathcal{C}^{(j)}}$ et $d_{[y],\mathcal{C}^{(j)}}$ le degré minimal des polynômes appartenant à $\tilde{\Phi}_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ et à $\tilde{\Phi}_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$, et nous définissons les ensembles

$$\Phi_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big) \;=\; \{\phi\in\tilde{\Phi}_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big),\ \deg\phi = d_{[x],\mathcal{C}^{(j)}} \text{ et } \phi \text{ unitaire }\}$$

et

$$\Phi_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big) \;=\; \{\psi\in\tilde{\Phi}_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big),\ \deg\psi = d_{[y],\mathcal{C}^{(j)}} \text{ et } \psi \text{ unitaire }\}\ .$$

Lemme 2.6. — *Nous avons l'égalité $d_{[x],\mathcal{C}^{(j)}} = d_{[y],\mathcal{C}^{(j)}}$ et l'application $Inv_{x/y}$ induit une bijection de $\Phi_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ sur $\Phi_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$.*

Preuve du lemme. — Comme dans la preuve du lemme 2.4 nous vérifions que si un polynôme f vérifie $\mu^{(j)}_\alpha(f) < \mu^{(j)}_\beta(f)$ pour tout $\alpha<\beta$ dans $A^{(j)}$, alors le polynôme $g = Inv_{x/y}(f)$ est de même degré que f et vérifie les mêmes inégalités.

Par conséquent l'application $Inv_{x/y}$ induit une bijection de $\tilde{\Phi}_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)\cap IU(K[x])$ sur $\tilde{\Phi}_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)\cap IU(K[y])$, d'où l'égalité des degrés $d_{[x],\mathcal{C}^{(j)}} = d_{[y],\mathcal{C}^{(j)}}$ et la bijection cherchée.

□

Lemme 2.7. — *Soient ϕ et $\psi = Inv_{x/y}(\phi)$ deux polynômes appartenant respectivement aux ensembles $\Phi_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ et $\Phi_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$, et soient $\gamma = \mu(\phi)$ et $\delta = \mu(\psi)$. Alors les valuations augmentées limites $\mu'_{[x]} = \big[\mathcal{C}^{(j)}\ ;\ \mu'_{[x]}(\phi) = \gamma\big]$ et $\mu'_{[y]} = \big[\mathcal{C}^{(j)}\ ;\ \mu'_{[y]}(\psi) = \delta\big]$ sont égales.*

Preuve du lemme. — La preuve est analogue à la preuve du lemme 2.5, nous utilisons la proposition 1.2 à la place du théorème 5.2. [**McL 1**].

□

Pour connaître les premières valuations $\mu_{[x],1}^{(j+1)}$ et $\mu_{[y],1}^{(j+1)}$ des sous-familles admissibles $\mathcal{S}_{[x]}^{(j+1)}$ et $\mathcal{S}_{[y]}^{(j+1)}$, il faut considérer les ensembles $\Lambda_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ et $\Lambda_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ définis respectivement par

$$\Lambda_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big) = \{\mu(\phi) \mid \phi \in \Phi_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)\} \text{ et } \Lambda_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big) = \{\mu(\psi) \mid \psi \in \Phi_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)\} \ .$$

Nous déduisons du lemme 2.6 que l'ensemble $\Lambda_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ a un plus grand élément γ si et seulement si $\Lambda_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ a un plus grand élément δ, et que si ϕ est un polynôme de $\Phi_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ vérifiant $\mu(\phi) = \gamma$ alors le polynôme ψ de $\Phi_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ défini par $\psi = Inv_{x/y}(\phi)$ vérifie $\mu(\psi) = \delta$.

Et de même si $\Lambda_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ n'a pas de plus grand élément et si $\big(\gamma_\theta\big)_{\theta\in T}$ est une famille cofinale dans $\Lambda_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ avec $\gamma_\theta = \mu(\phi_\theta)$, la famille $\big(\delta_\theta\big)_{\theta\in T}$ définie par $\delta_\theta = \mu(\psi_\theta)$, avec $\psi_\theta = Inv_{x/y}(\phi_\theta)$ est aussi une famille cofinale dans $\Lambda_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$.

Dans le cas où $\Lambda_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ et $\Lambda_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ ont un plus grand élément, respectivement $\gamma = \mu(\phi)$ et $\delta = \mu(\psi)$, nous posons $\phi_{[x],1}^{(j+1)} = \phi$, $\gamma_{[x],1}^{(j+1)} = \gamma$ et $\psi_{[y],1}^{(j+1)} = \psi$, $\delta_{[y],1}^{(j+1)} = \delta$. Alors les valuation $\mu_{[x],1}^{(j+1)}$ et $\mu_{[x],1}^{(j+1)}$ sont les valuations augmentées limites $\mu_{[x],1}^{(j+1)} = \big[\mathcal{C}^{(j)}\ ;\ \mu_{[x],1}^{(j+1)}(\phi_{[x],1}^{(j+1)}) = \gamma_{[x],1}^{(j+1)}\big]$ et $\mu_{[y],1}^{(j+1)} = \big[\mathcal{C}^{(j)}\ ;\ \mu_{[y],1}^{(j+1)}(\psi_{[y],1}^{(j+1)}) = \delta_{[y],1}^{(j+1)}\big]$, et nous déduisons du lemme 2.7 que ces valuations sont égales.

Dans le cas où les ensembles $\Lambda_{[x]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ et $\Lambda_{[y]}\big(\mathcal{C}^{(j)}\big)$ n'ont pas de plus grand élément, nous pouvons choisir un polynôme quelconque $\phi_{[x],1}^{(j+1)}$ dans $\Phi_{[x]}\big(\mathcal{C}\big)$ et son image $\psi_{[y],1}^{(j+1)} = Inv_{x/y}(\phi_{[x],1}^{(j+1)})$ dans $\Phi_{[y]}\big(\mathcal{C}\big)$ pour définir les valuations $\mu_{[x],1}^{(j+1)}$ et $\mu_{[x],1}^{(j+1)}$ comme les valuations augmentées limites $\mu_{[x],1}^{(j+1)} = \big[\mathcal{C}^{(j)}\ ;\ \mu_{[x],1}^{(j+1)}(\phi_{[x],1}^{(j+1)}) = \gamma_{[x],1}^{(j+1)}\big]$ et $\mu_{[y],1}^{(j+1)} = \big[\mathcal{C}^{(j)}\ ;\ \mu_{[y],1}^{(j+1)}(\psi_{[y],1}^{(j+1)}) = \delta_{[y],1}^{(j+1)}\big]$, et nous déduisons encore du lemme 2.7 que ces valuations sont égales.

Nous avons ainsi montré que si x et y sont deux générateurs de l'extension L sur K nous pouvons choisir des familles admises $\mathcal{A}_{[x]}$ et $\mathcal{A}_{[y]}$ qui sont égales en tant que familles de valuations du corps L.

□

Ainsi à toute valuation μ du corps L extension transcendante pure de K, prolongeant la valuation ν, nous pouvons associer une famille $\mathcal{A}(\mu) = (\mu_i)_{i\in I}$ de valuations de L, que nous appelons encore *la famille admise* associée à la valuation μ.

Comme nous l'avons remarqué la notion de famille admissible ou admise de valuations de l'anneau des polynômes $K[x]$ ne peut pas s'étendre simplement à une famille de valuations du corps $L = K(x)$. Nous pouvons donc nous demander s'il est possible de donner une définition de famille admissible ou de famille admise de valuations de L qui ne fasse pas intervenir le choix d'un générateur.

Dans le cas d'une extension algébrique $L = K(\theta)$ et d'une pseudo-valuation μ de $K[x]$ de socle l'idéal engendré par le polynôme minimal de θ sur K, il ne semble pas possible de trouver une famille de valuations de $K[x]$ indépendante du générateur θ.

Mais par analogie avec l'étude des singularités des courbes planes, il semble naturel de se demander si au moins pour des générateurs suffisamment généraux, dans un sens à préciser, de l'extension L, les familles admises associées partagent certaines propriétés. Par exemple nous pouvons nous demander si le nombre de sous-familles admissibles simples dans chaque famille admise est indépendant du générateur, ou si le nombre de valuations dans chaque sous-famille admissible discrète est le même.

Références

[McL 1] S. MacLane : A construction for absolute values in polynomial rings. Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 363-395.

[McL 2] S. MacLane : A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field. Duke Math. J. **2** (1936), 492-510.

[Va1] M. Vaquié : Extension d'une valuation. Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 3439-3481.

[Va2] M. Vaquié : Famille admise associée à une valuation de $K[x]$, Sem. et Congr. **10** (2005), 391-428.

Michel Vaquié, Institut de Mathématiques de Toulouse, UMR 5219, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France

E-mail : vaquie@math.univ-toulouse.fr